

# 具有年龄结构的MSIQRS传染病模型的稳定性分析\*

豆中丽

重庆财经学院, 重庆 400055

**摘要:** 讨论一类具有年龄结构MSIQRS传染病模型, 得出基本再生数 $R_0$ 和接种再生数 $R(\varphi)$ 的表达式, 证明了当 $R(\varphi) < 1$ 时, 无病平衡点局部渐近稳定; 当 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点全局渐近稳定性; 当 $R(\varphi) > 1$ 时, 无病平衡点不稳定, 此时系统存在地方病平衡点, 并给出了地方病平衡点局部渐近稳定的条件; 同时用基本再生数的表达式进一步解释了接种在控制消除传染病中的作用。

**关键词:** 年龄结构; 接种; 基本再生数; 稳定性

**中图分类号:** O175.12 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579(2021)03-0159-08

## Stability analysis of MSIQRS epidemiological model with age structure

DOU Zhongli

Chongqing College of Finance and Economics, Chongqing 400055, China

**Abstract:** A class of MSIQRS epidemic models with age structure was discussed, and the expressions of basic reproductive number  $R_0$  and the reproductive number with vaccination  $R(\varphi)$  were derived. It was proved that when  $R(\varphi) < 1$ , the disease-free equilibrium was locally asymptotically stable at that time. when  $R_0 < 1$ , the disease-free equilibrium was globally asymptotically stable. When  $R(\varphi) > 1$ , the disease-free equilibrium is unstable. And there exists only endemic equilibrium state, and the conditions of local asymptotic stability of the endemic equilibrium point are given. The expression of basic reproductive number is used to further explain the role of isolation in the control of eliminating infectious diseases.

**Key words:** age structure; vaccination; basic reproductive number; stability

传染病是由病毒、细菌和寄生虫等感染人体后具有传染性的疾病<sup>[1]</sup>, 关于传染病模型的研究已有很多成果<sup>[2-4]</sup>。现代医学说明隔离是预防和控制传染病的有效手段之一, 例如在2003年爆发的SARS传染病, 采用有效的隔离措施切断了传染病的传播途径, 由此可见隔离对于SARS疫情的控制功不可没, 因此建立带有隔离治疗的数学模型来说明这一问题显得尤为重要<sup>[5-6]</sup>。但是由于不同年龄的人群对同一疾病的感染程度不一样, 有些疾病(如风疹、小儿麻痹、百日咳等)只在儿童中传播, 有些疾病(如性病)只在成人中传播, 所以研究年龄结构的流行病模型有着重要的理论和实际意义<sup>[7-9]</sup>。在上述文献研究的基础上, 本文讨论了一类具有隔离的年龄结构MSIQRS传染病模型, 给出了平衡点的存在性及稳定性条件, 并用基本再生数的表达式解释了隔离治疗对于预防控制疾病的重要性。

\*收稿日期: 2019-09-20

录用日期: 2020-09-18

网络首发日期: 2020-11-05

基金项目: 重庆市教委科技创新项目(KJQN201902105)

作者简介: 豆中丽(1983年生), 女; 研究方向: 常微分方程与动力系统; E-mail: 1343639662@qq.com

## 1 模型建立

当母亲被某种传染病感染后, 她的体内将产生抗体, 而这种抗体将通过胎盘传递给胎儿, 所以对那些处于染病期和已恢复的母亲, 他们所生育的下一代, 在一个短暂时期内有自然免疫力<sup>[10]</sup>, 经过一定时期后, 免疫力丧失变成易感者, 我们把这类个体归入  $M$  类。把人口分为被动免疫类、易感类、染病类、隔离类、康复类, 分别用  $M(a, t)$ 、 $S(a, t)$ 、 $I(a, t)$ 、 $Q(a, t)$ 、 $R(a, t)$  表示各类年龄密度函数,  $a$  表示年龄且  $0 \leq a < +\infty$ ,  $t$  表示时间, 例如时刻  $t$  年龄段  $[a_1, a_2]$  的易感者为  $\int_{a_1}^{a_2} S(a, t) da$ , 则含隔离的年龄结构 MSIQRS 传染病模型为

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial M(a, t)}{\partial a} + \frac{\partial M(a, t)}{\partial t} = -(\delta + d(a))M(a, t), \\ \frac{\partial S(a, t)}{\partial a} + \frac{\partial S(a, t)}{\partial t} = \delta M(a, t) - (d(a) + \lambda(a, t))S(a, t) - \varphi(a)S(a, t), \\ \frac{\partial I(a, t)}{\partial a} + \frac{\partial I(a, t)}{\partial t} = \lambda(a, t)S(a, t) - (d(a) + g(a) + \alpha(a))I(a, t), \\ \frac{\partial Q(a, t)}{\partial a} + \frac{\partial Q(a, t)}{\partial t} = g(a)I(a, t) - (d(a) + \alpha(a))Q(a, t), \\ \frac{\partial R(a, t)}{\partial a} + \frac{\partial R(a, t)}{\partial t} = \varphi(a)S(a, t) + \alpha(a)(I(a, t) + Q(a, t)) - d(a)R(a, t), \\ M(0, t) = \int_0^{+\infty} b(a)(M(a, t) + I(a, t) + Q(a, t) + R(a, t)) da, \\ S(0, t) = \int_0^{+\infty} b(a)S(a, t) da, \\ I(0, t) = Q(0, t) = R(0, t) = 0. \end{array} \right. \quad (1)$$

初始条件为

$$M(a, 0) = M_0(a), S(a, 0) = S_0(a), I(a, 0) = I_0(a), Q(a, 0) = Q_0(a), R(a, 0) = R_0(a),$$

其中  $\delta$  为被动免疫类转化为易感类的传递率;  $d(a)$  为年龄依赖自然死亡率;  $\alpha(a)$  为年龄依赖恢复率;  $g(a)$  为年龄依赖隔离率;  $\varphi(a)$  为年龄依赖接种比率;  $b(a)$  为年龄依赖出生率。传染率函数为

$$\lambda(a, t) = k(a) \int_0^{+\infty} \beta(a) I(a, t) da,$$

其中  $\beta(a) \in C[0, +\infty)$  为年龄依赖的染病率;  $k(a) \in C[0, +\infty)$  为年龄依赖的接触率。把模型 (1) 中前 5 个方程相加, 得到总人口密度函数  $P(a, t) = M(a, t) + S(a, t) + I(a, t) + Q(a, t) + R(a, t)$  满足

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P(a, t)}{\partial a} + \frac{\partial P(a, t)}{\partial t} = -d(a)P(a, t), \\ P(0, t) = \int_0^{+\infty} b(a)P(a, t) da, \\ P(a, 0) = P_0(a) = M_0(a) + S_0(a) + I_0(a) + Q_0(a) + R_0(a). \end{array} \right.$$

这是标准的 Mckendrick-Von Forester 人口发展方程。假设所有的参数都非负, 且

$$b(a), \beta(a) \in L^\infty[0, +\infty), \quad d(a), g(a), \alpha(a) \in C[0, +\infty), \quad d(a) > 0, \quad \int_0^{+\infty} d(a) da = +\infty.$$

假设当个体超过一定生育年龄时有  $b(a) = 0$ ; 当人口的净再生率等于 1, 即

$$\int_0^{+\infty} b(a) e^{-\int_0^a d(\tau) d\tau} da = 1, \quad P_\infty(a) = P(a, t) = b_0 e^{-\int_0^a d(\tau) d\tau}.$$

设  $M_0(a) \geq 0, S_0(a) \geq 0, I_0(a) \geq 0, Q_0(a) \geq 0, R_0(a) \geq 0$ , 则有

$$b_0 = \frac{\int_0^{+\infty} P_\infty(a) da}{\int_0^{+\infty} e^{-\int_0^a d(\tau) d\tau} da}.$$

利用模型 (1) 中第 6、第 7 个方程可得

$$M(0, t) + S(0, t) = \int_0^{+\infty} b(a)P_{\infty}(a)da = b_0.$$

下面对模型(1)作归一化变换<sup>[11]</sup>, 令

$$\begin{aligned} m(a, t) &= \frac{M(a, t)}{P_{\infty}(a)}, \quad s(a, t) = \frac{S(a, t)}{P_{\infty}(a)}, \quad i(a, t) = \frac{I(a, t)}{P_{\infty}(a)}, \quad q(a, t) = \frac{Q(a, t)}{P_{\infty}(a)}, \quad r(a, t) = \frac{R(a, t)}{P_{\infty}(a)}, \\ \lambda(a, t) &= k(a) \int_0^{+\infty} \beta(a)P_{\infty}(a)i(a, t)da = k(a)V_0, \\ V_0 &= \int_0^{+\infty} \beta(a)P_{\infty}(a)i(a, t)da. \end{aligned} \quad (2)$$

则模型(1)转化为

$$\begin{cases} \frac{\partial m(a, t)}{\partial a} + \frac{\partial m(a, t)}{\partial t} = -\delta m(a, t), \\ \frac{\partial s(a, t)}{\partial a} + \frac{\partial s(a, t)}{\partial t} = \delta m(a, t) - \lambda(a, t)s(a, t) - \varphi(a)s(a, t), \\ \frac{\partial i(a, t)}{\partial a} + \frac{\partial i(a, t)}{\partial t} = \lambda(a, t)s(a, t) - [g(a) + \alpha(a)]i(a, t), \\ \frac{\partial q(a, t)}{\partial a} + \frac{\partial q(a, t)}{\partial t} = g(a)i(a, t) - \alpha(a)q(a, t), \\ \frac{\partial r(a, t)}{\partial a} + \frac{\partial r(a, t)}{\partial t} = \varphi(a)s(a, t) + \alpha(a)[i(a, t) + q(a, t)], \\ m(a, t) + s(a, t) + i(a, t) + q(a, t) + r(a, t) = 1, \\ m(0, t) + s(0, t) = 1, i(0, t) = q(0, t) = r(0, t) = 0, \\ m(a, 0) = m_0(a), s(a, 0) = s_0(a), i(a, 0) = i_0(a), r(a, 0) = r_0(a). \end{cases} \quad (3)$$

## 2 基本再生数的表达式和无病平衡点的局部稳定性

本节中我们将给出基本再生数 $R_0$ 和接种再生数 $R(\varphi)$ 的表达式,  $R_0$ 表示染病个体在其整个染病期间易感人口中所感染的新病人平均数。

由于模型(3)的平衡解满足

$$\begin{cases} \frac{dm(a)}{da} = -\delta m(a), \\ \frac{ds(a)}{da} = \delta m(a) - \lambda(a)s(a) - \varphi(a)s(a), \\ \frac{di(a)}{da} = \lambda(a)s(a) - [g(a) + \alpha(a)]i(a), \\ \frac{dq(a)}{da} = g(a)i(a) - \alpha(a)q(a), \\ \frac{dr(a)}{da} = \varphi(a)s(a) + \alpha(a)[i(a) + q(a)], \\ \lambda(a) = k(a) \int_0^{+\infty} \beta(a)P_{\infty}(a)i(a)da, \\ m(a) + s(a) + i(a) + q(a) + r(a) = 1, \\ m(0) + s(0) = 1, i(0) = q(0) = r(0) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

故易得到无病平衡点 $E_0(m_0(a), s_0(a), i_0(a), q_0(a), r_0(a))$ , 其中

$$m_0(a) = 0, \quad s_0(a) = e^{-\int_0^a \varphi(\tau)d\tau}, \quad i_0(a) = q_0(a) = 0, \quad r_0(a) = 1 - e^{-\int_0^a \varphi(\tau)d\tau}.$$

在无病平衡点处对模型(3)进行线性化, 并假设线性化模型的解具有如下形式

$$\begin{aligned} m(a, t) &= \bar{m}(a)e^{\lambda t}, & s(a, t) &= s_0(a) + \bar{s}(a)e^{\lambda t}, & i(a, t) &= \bar{i}(a)e^{\lambda t}, \\ q(a, t) &= \bar{q}(a)e^{\lambda t}, & r(a, t) &= r_0(a) + \bar{r}(a)e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

省略高阶项得

$$\begin{cases} \lambda \bar{m}(a) + \frac{d\bar{m}(a)}{da} = -\delta \bar{m}(a), \\ \lambda \bar{s}(a) + \frac{d\bar{s}(a)}{da} = \delta \bar{m}(a) - \lambda(a)s_0(a) - \varphi(a)\bar{s}(a), \\ \lambda \bar{i}(a) + \frac{d\bar{i}(a)}{da} = \lambda(a)s_0(a) - [g(a) + \alpha(a)]\bar{i}(a), \\ \lambda \bar{q}(a) + \frac{d\bar{q}(a)}{da} = g(a)\bar{i}(a) - \alpha(a)\bar{q}(a), \\ \lambda \bar{r}(a) + \frac{d\bar{r}(a)}{da} = \varphi(a)\bar{s}(a) + \alpha(a)[\bar{i}(a) + \bar{q}(a)], \\ \lambda(a) = k(a) \int_0^{+\infty} \beta(a)P_\infty(a)\bar{i}(a)da, \\ \bar{m}(0) = \bar{s}(0) = \bar{i}(0) = \bar{q}(0) = \bar{r}(0) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

由模型 (5) 中第 3 个方程得到

$$\bar{i}(a) = \int_0^a \lambda(\xi) e^{-\int_0^\xi \varphi(\tau) d\tau} e^{-\lambda(a-\xi)} e^{-\int_\xi^a [g(\tau) + \alpha(\tau)] d\tau} d\xi = V_0 \int_0^a k(\xi) e^{-\int_0^\xi \varphi(\tau) d\tau} e^{-\lambda(a-\xi)} e^{-\int_\xi^a [g(\tau) + \alpha(\tau)] d\tau} d\xi, \quad (6)$$

其中

$$\lambda(a) = k(a)V_0, \quad V_0 = \int_0^{+\infty} \beta(a)P_\infty(a)\bar{i}(a)da. \quad (7)$$

把式 (6) 代入式 (7) 得

$$1 = \int_0^{+\infty} \beta(a)P_\infty(a) \int_0^a k(\xi) e^{-\int_0^\xi \varphi(\tau) d\tau} e^{-\lambda(a-\xi)} e^{-\int_\xi^a [g(\tau) + \alpha(\tau)] d\tau} d\xi da. \quad (8)$$

令

$$G(\lambda) = \int_0^{+\infty} \beta(a)P_\infty(a) \int_0^a k(\xi) e^{-\int_0^\xi \varphi(\tau) d\tau} e^{-\lambda(a-\xi)} e^{-\int_\xi^a [g(\tau) + \alpha(\tau)] d\tau} d\xi da.$$

显然  $R(\varphi) = G(0)$ , 即

$$R(\varphi) = \int_0^{+\infty} \beta(a)P_\infty(a) \int_0^a k(\xi) e^{-\int_0^\xi \varphi(\tau) d\tau} e^{-\int_\xi^a [g(\tau) + \alpha(\tau)] d\tau} d\xi da.$$

**定理 1** 如果  $R(\varphi) < 1$ , 则无病平衡点  $E_0(m_0(a), s_0(a), i_0(a), q_0(a), r_0(a))$  是局部渐近稳定的; 如果  $R(\varphi) > 1$ , 则无病平衡点  $E_0$  是不稳定的。

**证明** 当  $\lambda$  取实数时, 有

$$G'(\lambda) < 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} G(\lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} G(\lambda) = +\infty.$$

当  $G(0) > 1$  时, 方程 (8) 有唯一的正实根, 此时无病平衡点  $E_0$  不稳定。当  $G(0) < 1$  时, 方程 (8) 有唯一的负实根  $\lambda^*$ ,  $\lambda^*$  是  $G(\lambda) = 1$  的占优实根。设  $\lambda = x + iy$  是方程 (8) 的任意复数根, 由于  $1 = G(\lambda^*) = |G(x + iy)| \leq G(x)$ , 由  $G(\lambda)$  的递减性得  $\text{Re}\lambda < \lambda^*$ 。由此可得, 如果  $R(\varphi) < 1$ , 则无病平衡点  $E_0$  是局部渐近稳定的; 如果  $R(\varphi) > 1$ , 则无病平衡点  $E_0$  是不稳定的。

事实上, 如果不接种, 即  $\varphi(a) = 0$ , 则得到基本再生数

$$R(0) = \int_0^{+\infty} \beta(a)P_\infty(a) \int_0^a k(\xi) e^{-\int_\xi^a [g(\tau) + \alpha(\tau)] d\tau} d\xi da.$$

### 3 无病平衡点的全局稳定性

**定理 2** 如果  $R_0 < 1$ , 则模型 (3) 的无病平衡点  $E_0$  是全局渐近稳定的。

**证明** 令

$$f(a, t) = \lambda(a, t)s(a, t), \quad \lambda(a, t) = k(a) \int_0^{+\infty} \beta(a)P_\infty(a)i(a, t)da = k(a)V(t),$$

其中  $V(t) = \int_0^{+\infty} \beta(a)P_\infty(a)i(a, t)da$ 。

沿特征线对模型 (3) 中第3、4个方程积分得

$$i(a, t) = \int_0^a f(\xi, t - a + \xi) e^{-\int_\xi^a [g(\tau) + \alpha(\tau)] d\tau} d\xi, \quad a < t,$$

$$q(a, t) = \int_0^a g(\xi) i(\xi, t - a + \xi) e^{-\int_\xi^a [g(\tau) + \alpha(\tau)] d\tau} d\xi, \quad a < t.$$

因此

$$f(a, t) = \lambda(a, t)s(a, t) \leq \lambda(a, t) = k(a)V(t) = k(a) \int_0^{+\infty} \beta(a)P_\infty(a) \int_0^a f(\xi, t - a + \xi) e^{-\int_\xi^a [g(\tau) + \alpha(\tau)] d\tau} d\xi da.$$

令  $F(a) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup f(a, t)$ 。对上式两边去  $t \rightarrow +\infty$  时的上极限，由 Fatou 引理 [12] 得

$$F(a) \leq k(a) \int_0^{+\infty} \beta(a)P_\infty(a) \int_0^a F(\xi) e^{-\int_\xi^a [g(\tau) + \alpha(\tau)] d\tau} d\xi da. \tag{9}$$

令常数

$$C = \int_0^{+\infty} \beta(a)P_\infty(a) \int_0^a F(\xi) e^{-\int_\xi^a [g(\tau) + \alpha(\tau)] d\tau} d\xi da. \tag{10}$$

则式 (9) 变为  $F(a) \leq k(a)C$ 。从而

$$C \leq \int_0^{+\infty} \beta(a)P_\infty(a) \int_0^a k(\xi)C e^{-\int_\xi^a [g(\tau) + \alpha(\tau)] d\tau} d\xi da = CR_0. \tag{11}$$

由式 (11) 可以看出，若  $R_0 < 1$ ，则  $C = 0$ 。从而  $F(a) = 0$ 。因此， $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup f(a, t) = 0$ 。利用特征线法对模型 (3) 的第3、4个方程积分得到  $i(a, t), q(a, t)$ ，取极限得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} m(a, t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} i(a, t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} q(a, t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda(a, t) = 0.$$

从而有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s(a, t) = e^{-\int_0^a \varphi(\tau) d\tau} = s_0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} r(a, t) = 1 - e^{-\int_0^a \varphi(\tau) d\tau} = r_0.$$

故若  $R_0 < 1$ ，则无病平衡点  $E_0$  全局渐近稳定。

### 4 地方病平衡点的存在性和稳定性

**定理3** 当  $R(\varphi) > 1$  时，模型 (3) 存在一个地方病平衡点。

**证明** 模型 (3) 有满足如下方程组的正解  $E^*(m^*(a), s^*(a), i^*(a), q^*(a), r^*(a))$ ,

$$\begin{cases} \frac{dm^*(a)}{da} = -\delta m^*(a), \\ \frac{ds^*(a)}{da} = \delta m^*(a) - \lambda^*(a)s^*(a) - \varphi(a)s^*(a), \\ \frac{di^*(a)}{da} = \lambda^*(a)s^*(a) - [g(a) + \alpha(a)]i^*(a), \\ \frac{dq^*(a)}{da} = g(a)i^*(a) - \alpha(a)q^*(a), \\ \frac{dr^*(a)}{da} = \varphi(a)s^*(a) + \alpha(a)[i^*(a) + q^*(a)], \\ \lambda^*(a) = k(a) \int_0^{+\infty} \beta(a)P_\infty(a)i^*(a) da = kV^*, \\ m^*(a) + s^*(a) + i^*(a) + q^*(a) + r^*(a) = 1, \\ m^*(0) + s^*(0) = 1, i^*(0) = q^*(0) = r^*(0) = 0, \end{cases} \tag{12}$$

其中

$$V^* = \int_0^{+\infty} \beta(a)P_\infty(a)i^*(a) da. \tag{13}$$

求解方程组 (12) 中的第2、3个方程得

$$s^*(a) = \delta \int_0^a m^*(\xi) e^{-\int_0^a [\varphi(\tau) + k(\tau)V^*] d\tau} d\xi, \tag{14}$$

$$i^*(a) = V^* k(\xi) s^*(\xi) e^{-\int_\xi^a [g(\tau) + \alpha(\tau)] d\tau} d\xi. \tag{15}$$

将式 (14) 代入式 (15) 得

$$i^*(a) = V^* \int_0^a k(\xi) e^{-\int_\xi^a [g(\tau) + \alpha(\tau)] d\tau} \int_0^a \delta m^*(\eta) e^{-\int_0^a [\varphi(\tau) + k(\tau)V^*] d\tau} d\eta d\xi. \tag{16}$$

把式 (16) 代入式 (13), 然后在所得方程的两边同除以  $V^*$  注意到 ( $V^* \neq 0$ ) 得

$$1 = \int_0^{+\infty} \beta(a) P_\infty(a) \int_0^a k(\xi) e^{-\int_\xi^a [g(\tau) + \alpha(\tau)] d\tau} \int_0^a \delta m^*(\eta) e^{-\int_0^a [\varphi(\tau) + k(\tau)V^*] d\tau} d\eta d\xi da = H(V^*). \tag{17}$$

若方程 (17) 有一个正解, 那么模型 (3) 就存在地方病平衡点。又因为  $m^*(a) + s^*(a) + i^*(a) + q^*(a) + r^*(a) = 1, m^*(a) > 0, s^*(a) > 0$ , 则  $i^*(a) < 1$ , 即

$$V^* \int_0^a k(\xi) e^{-\int_\xi^a [g(\tau) + \alpha(\tau)] d\tau} \int_0^a \delta m^*(\eta) e^{-\int_0^a [\varphi(\tau) + k(\tau)V^*] d\tau} d\eta d\xi < 1. \tag{18}$$

对任意  $V^* > 0$ , 由方程 (17) ~ (18) 得

$$V^* H(V^*) = \int_0^{+\infty} \beta(a) P_\infty(a) V^* \int_0^a k(\xi) e^{-\int_\xi^a [g(\tau) + \alpha(\tau)] d\tau} \int_0^a \delta m^*(\eta) e^{-\int_0^a [\varphi(\tau) + k(\tau)V^*] d\tau} d\eta d\xi da < \int_0^{+\infty} \beta(a) P_\infty(a) da.$$

令  $\beta^+ = \int_0^{+\infty} \beta(a) P_\infty(a) da$ , 则  $V^* H(V^*) < \beta^+$ . 若  $V^* = \beta^+$ , 有  $H(\beta^+) < 1$ , 由于  $H(V^*)$  是关于  $V^*$  的单调递减连续函数, 因此若当  $\int_0^a \delta m^*(\eta) d\eta = 1$ , 则  $H(0) = R(\varphi) > 1$  时, 则  $H(V^*) = 1$  在区间  $(0, \beta^+)$  上存在正解  $\tilde{V}^*$ . 即当  $R(\varphi) > 1$  时, 模型 (3) 存在地方病平衡点<sup>[13]</sup>.

接着讨论地方病平衡点的稳定性, 令  $\bar{m}, \bar{s}, \bar{i}, \bar{q}, \bar{r}, \bar{V}$  是  $m^*, s^*, i^*, q^*, r^*, V^*$  的线性扰动, 对模型 (3) 在地方病平衡点  $E^*(m^*(a), s^*(a), i^*(a), q^*(a), r^*(a))$  处线性化, 考虑如下指数解

$$\begin{aligned} \bar{m}(a, t) &= \bar{m}(a) e^{\lambda t}, & \bar{s}(a, t) &= \bar{s}(a) e^{\lambda t}, & \bar{i}(a, t) &= \bar{i}(a) e^{\lambda t}, \\ \bar{q}(a, t) &= \bar{q}(a) e^{\lambda t}, & \bar{r}(a, t) &= \bar{r}(a) e^{\lambda t}, & \bar{V}(t) &= \bar{V} e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

省略高阶项得

$$\begin{cases} \lambda \bar{m}(a) + \frac{d\bar{m}(a)}{da} = -\delta \bar{m}(a), \\ \lambda \bar{s}(a) + \frac{d\bar{s}(a)}{da} = \delta m^*(a) - k(a) [s^*(a) \bar{V} + \bar{s}(a) V^*] - \varphi(a) \bar{s}(a), \\ \lambda \bar{i}(a) + \frac{d\bar{i}(a)}{da} = k(a) [s^*(a) \bar{V} + \bar{s}(a) V^*] - [g(a) + \alpha(a)] \bar{i}(a), \\ \lambda \bar{q}(a) + \frac{d\bar{q}(a)}{da} = g(a) \bar{i}(a) - \alpha(a) \bar{q}(a), \\ \lambda \bar{r}(a) + \frac{d\bar{r}(a)}{da} = \varphi(a) \bar{s}(a) + \alpha(a) [\bar{i}(a) + \bar{q}(a)], \\ \bar{V} = \int_0^{+\infty} \beta(a) P_\infty(a) \bar{i}(a) da. \end{cases} \tag{19}$$

注意到  $\bar{m}, \bar{s}, \bar{i}, \bar{q}, \bar{r}$  可正可负, 若  $\bar{V} \neq 0$ , 令  $m_1 = \frac{\bar{m}}{\bar{V}}, s_1 = \frac{\bar{s}}{\bar{V}}, i_1 = \frac{\bar{i}}{\bar{V}}, q_1 = \frac{\bar{q}}{\bar{V}}, r_1 = \frac{\bar{r}}{\bar{V}}$ , 则

$$\begin{cases} \lambda m_1(a) + \frac{dm_1(a)}{da} = -\delta m_1(a), \\ \lambda s_1(a) + \frac{ds_1(a)}{da} = \delta m_1(a) - k(a)[s^*(a) + s_1(a)V^*] - \varphi(a)s_1(a), \\ \lambda i_1(a) + \frac{di_1(a)}{da} = k(a)[s^*(a) + s_1(a)V^*] - [g(a) + \alpha(a)]i_1(a), \\ \lambda q_1(a) + \frac{dq_1(a)}{da} = g(a)i_1(a) - \alpha(a)q_1(a), \\ \lambda r_1(a) + \frac{dr_1(a)}{da} = \varphi(a)s_1(a) + \alpha(a)[i_1(a) + q_1(a)], \\ 1 = \int_0^{+\infty} \beta(a)P_\infty(a)i_1(a)da. \end{cases} \quad (20)$$

记

$$T(\lambda) := \int_0^{+\infty} \beta(a)P_\infty(a)i_1(a)da. \quad (21)$$

求解方程组 (20) 得

$$\begin{aligned} s_1(a) &= \int_0^a \left[ \delta e^{-(\delta+\lambda)\xi} - k(\xi)\delta \int_0^a e^{-\delta\eta} e^{-\int_0^\eta [\varphi(\tau) + k(\tau)V^*]d\tau} d\eta \right] e^{-\int_0^a [\varphi(\tau) + k(\tau)V^*]d\tau} e^{-\lambda(a-\xi)} d\xi, \\ i_1(a) &= \int_0^a k(\zeta) \left\{ \delta \int_0^a e^{-\delta\sigma} e^{-\int_0^\sigma [\varphi(\tau) + k(\tau)V^*]d\tau} d\sigma + V^* \int_0^a \left[ \delta e^{-(\delta+\lambda)\xi} - k(\xi)\delta \int_0^a e^{-\delta\eta} e^{-\int_0^\eta [\varphi(\tau) + k(\tau)V^*]d\tau} d\eta \right] \right. \\ &\quad \left. \cdot e^{-\int_0^a [\varphi(\tau) + k(\tau)V^*]d\tau} e^{-\lambda(a-\xi)} d\xi \right\} e^{-\int_\zeta^a [g(\tau) + \alpha(\tau)]d\tau} e^{-\lambda(a-\zeta)} d\zeta \\ &= \int_0^a k(\zeta) \left\{ \delta \int_0^a e^{-\int_0^\sigma [\varphi(\tau) + k(\tau)V^*]d\tau} \left[ e^{-\delta\sigma} + V^* \left( e^{-(\delta+\lambda)\xi} - k(\xi) \int_0^a e^{-\delta\eta} e^{-\int_0^\eta [\varphi(\tau) + k(\tau)V^*]d\tau} d\eta \right) e^{-\lambda(a-\xi)} \right] d\xi \right\} \\ &\quad \cdot e^{-\int_\zeta^a [g(\tau) + \alpha(\tau)]d\tau} e^{-\lambda(a-\zeta)} d\zeta. \end{aligned}$$

令

$$H(a, \eta) = e^{-\delta\sigma} + V^* \left( e^{-(\delta+\lambda)\xi} - k(\xi) \int_0^a e^{-\delta\eta} e^{-\int_0^\eta [\varphi(\tau) + k(\tau)V^*]d\tau} d\eta \right) e^{-\lambda(a-\xi)},$$

则得到

$$i_1(a) = \int_0^a \delta k(\zeta) \left( \int_0^a e^{-\int_0^\sigma [\varphi(\tau) + k(\tau)V^*]d\tau} H(a, \eta) d\xi \right) e^{-\int_\zeta^a [g(\tau) + \alpha(\tau)]d\tau} e^{-\lambda(a-\zeta)} d\zeta.$$

将  $i_1(a)$  代入式 (21) 得

$$T(\lambda) = \int_0^{+\infty} \beta(a)P_\infty(a) \int_0^a \delta k(\zeta) \left( \int_0^a e^{-\int_0^\sigma [\varphi(\tau) + k(\tau)V^*]d\tau} H(a, \eta) d\xi \right) e^{-\int_\zeta^a [g(\tau) + \alpha(\tau)]d\tau} e^{-\lambda(a-\zeta)} d\zeta da.$$

**定理 4** 若满足以下条件

$$V^* \int_0^a \left[ \delta e^{-(\delta+\lambda)\xi} - k(\xi)\delta \int_0^a e^{-\delta\eta} e^{-\int_0^\eta [\varphi(\tau) + k(\tau)V^*]d\tau} d\eta \right] d\xi < 1, \quad (22)$$

则 (i)  $T(\lambda)$  关于  $\lambda$  递减且当  $\lambda \rightarrow +\infty$  时趋于 0; (ii)  $T(0) < 1$ 。

**证明** (i) 若条件 (22) 满足, 则可得到  $T(\lambda) \geq 0$  关于  $\lambda$  递减且当  $\lambda \rightarrow +\infty$  时,  $T(\lambda) \rightarrow 0$ 。

(ii) 令  $\lambda = 0$  得

$$\begin{aligned} T(0) &= \int_0^{+\infty} \beta(a)P_\infty(a) \int_0^a k(\zeta) e^{-\int_\zeta^a [g(\tau) + \alpha(\tau)]d\tau} \delta \int_0^a e^{-\delta\sigma} e^{-\int_0^\sigma [\varphi(\tau) + k(\tau)V^*]d\tau} d\sigma d\xi da \\ &\quad + \int_0^{+\infty} \beta(a)P_\infty(a) \int_0^a k(\zeta) e^{-\int_\zeta^a [g(\tau) + \alpha(\tau)]d\tau} V^* \int_0^a \left[ \delta e^{-\delta\xi} - k(\xi)\delta \int_0^a e^{-\delta\eta} e^{-\int_0^\eta [\varphi(\tau) + k(\tau)V^*]d\tau} d\eta \right] e^{-\int_0^a [\varphi(\tau) + k(\tau)V^*]d\tau} d\xi d\zeta da. \end{aligned}$$

由式 (17) 可以看出上式第一项的积分等于 1, 因此  $T(0) < 1$ 。

由定理 4 及上式  $T(\lambda)$ , 说明当方程  $T(\lambda) = 1$ , 也就是方程 (21) 有唯一的负实根且所有的复根实部都小于这个实根。

**定理 5** 假设式 (22) 成立, 则模型 (3) 的地方病平衡点局部渐近稳定。

## 5 讨 论

基本再生数  $R_0$  表示一个病人在其染病期间所感染的病人数。一旦隔离成功后, 则基本再生数  $R_0 < 1$ , 这说明隔离后可以使再生数减少, 即新感染病人数减少, 使无病平衡点稳定, 从而有利于病疫的控制消除传播。当  $R(\varphi) < 1$  时, 无病平衡点局部渐近稳定; 当  $R_0 < 1$  时, 无病平衡点全局渐近稳定性, 说明传染病逐渐的趋于灭绝; 当  $R(\varphi) > 1$  时, 地方病平衡点局部渐近稳定的, 这说明传染病不会消除, 而是逐渐趋于稳定, 形成一种地方病。

为了消除传染病, 人们总是尽可能的降低基本再生数  $R_0$  以至于小于 1。若  $\varphi(a), g(a), \alpha(a)$  增大时, 则  $R(\varphi)$  减少, 从而疾病容易控制。令  $\bar{\varphi}, \bar{g}, \bar{\alpha}$  分别为  $\varphi(a), g(a), \alpha(a)$  的上限, 此时  $R(\bar{\varphi}, \bar{g}, \bar{\alpha}) = \int_0^{+\infty} \beta(a) P_{\infty}(a) \int_{\xi}^a k(\xi) e^{-\bar{\varphi}\xi} e^{-(\bar{g} + \bar{\alpha})(a - \xi)} d\xi da$ , 则年龄  $\xi$  越大, 项  $e^{-(\bar{g} + \bar{\alpha})(a - \xi)}$  变大<sup>[10]</sup>, 这就说明隔离治疗越早越有利于控制疾病, 越晚可能造成疾病的爆发。

### 参考文献:

- [1] 马知恩, 周义仓, 王稳地, 等. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [2] 魏晓丹. 复杂网络上具出生和死亡的一类分数阶 SIR 模型的全局渐近稳定性[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2017, 56(4): 20-22+27.  
WEI X D. Global stability of a fraction order SIR model with birth and death on complex networks [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2017, 56(4): 20-22+27.
- [3] 杨俊仙, 于淑妹. 一类具有潜伏感染细胞的时滞病毒感染模型[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2020, 59(4): 158-167.  
YANG J X, YU S M. A delayed virus infection model with latent infection cells [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2020, 59(4): 158-167.
- [4] 梁雨琴, 贾云锋. 具有时滞的肿瘤免疫模型的稳定性与 Hopf 分支[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2020, 59(2): 28-33.  
LIANG Y Q, JIA Y F. Stability and Hopf bifurcation of a tumor immune model with time delay [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2020, 59(2): 28-33.
- [5] 高宏伟, 郝祥晖, 陈清江. 一类具有非线性传染率、隔离率的 SIRS 传染病模型解的存在性研究[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2012, 35(4): 482-489.  
GAO H W, HAO X H, CHEN Q J. Study on the existence of solution to an SIRS epidemic model with nonlinear contact and screening rates [J]. Journal of Sichuan Normal University(Natural Science), 2012, 35(4): 482-489.
- [6] 王娟, 何俊杰, 李学志. 一类具有接种疫苗的年龄结构传染病模型分析[J]. 系统科学与数学, 2015, 35(11): 1358-1366.  
WANG J, HE J J, LI X Z. Analysis of an age-structured epidemic model with vaccination [J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 2015, 35(11): 1358-1366.
- [7] LI X Z, LIU J X, Stabiliy of an age-structured epidemiological model for hepatitis [J]. J Appl Math Comput, 2018, 27(12): 159-173.
- [8] ZHANG X B, HUO H F, XIANG H. Dynamics of an SIQR epidemics model with uranine and pulse vaccination [J]. Appl Math Comput, 2014, 243(15): 546-558.
- [9] 王改霞, 刘纪轩, 李学志. 年龄结构 SIQR 传染病模型及稳定性[J]. 应用数学学报, 2018, 41(6): 777-787.  
WANG G X, LIU J X, LI X Z. Stability of age-structured SIQR epidemiological model [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2018, 41(6): 777-787.
- [10] HETHCOTE H. The mathermatics of infection diseases [J]. SIAM Review, 2010, 42(15): 599-653
- [11] GRIPENBERG G, LONDEN S O, STAFFANS O. Volterra intergral and funcional equaions [M]. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1990.
- [12] 郑维行, 王声望. 实变函数与泛函分析(第一册)[M]. 北京: 高等教育出版社, 1989.
- [13] STOER J, WITZGALL C. Convexity and optimization in finite dimension [M]. Berlin: Spinger, 1970.

(责任编辑 冯兆永)